

No.1 行列の定義と演算

この回のゴール

- 行列とは何かを、「型」「成分」という言葉を使って説明できる。
- 2つの行列が「等しい」とはどういうことかが分かる。
- 行列の和・差・スカラー倍を計算でき、その法則を**成分を使って**示せる。
- 転置行列を求められる。

■ 1. 行列とは

高校までは、数を 1 つずつ扱ったり、ベクトルとして $(2, 3)$ のように横一列に並べたりしてきた。線形代数では、数を**長方形に並べたもの**をひとかたまりとして扱う。

たとえば連立方程式

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

の「係数」だけを取り出して並べると

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

となる。 x, y という文字を書かなくても、この並びさえあれば方程式の情報はほぼ残っている。このように数を並べたものが**行列**である。

定義 1 行列

$m \times n$ 個の数を、縦に m 個、横に n 個の長方形に並べて括弧でくくったものを **$m \times n$ 行列** (m 行 n 列の行列) という。

- 横の並びを**行**、縦の並びを**列**という。上から順に第 1 行、第 2 行、 $\dots$ 、左から順に第 1 列、第 2 列、 $\dots$ と呼ぶ。
- 並べた 1 つ 1 つの数を**成分**という。第 i 行と第 j 列が交わる位置にある成分を **(i, j) 成分**といい、 a_{ij} のように書く。
- 「 $m \times n$ 」を行列の**型** (サイズ) という。

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

これを短く $A = (a_{ij})$ と書くこともある。

注意

- a_{ij} の添字は「**行が先、列が後**」。 a_{23} は「第 2 行・第 3 列」の成分であって、「第 2 列・第 3 行」ではない。
- この講座では当面、成分はすべて実数とする。

コラム：行と列の覚え方

漢字の「行」の右側には横棒が 2 本, 「列」の右側(りっとう)には縦棒が 2 本ある. だから「行は横, 列は縦」.

例 1

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

は 2×3 行列である. $(1, 3)$ 成分は $a_{13} = 3$, $(2, 1)$ 成分は $a_{21} = 4$.

■よく使う呼び名

- $1 \times n$ 行列 $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$ を行ベクトル, $m \times 1$ 行列 $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}$ を列ベクトルという.
- $n \times n$ 行列(縦と横の個数が同じ)を n 次正方行列という. 正方行列の $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ を対角成分という.
- すべての成分が 0 である行列を零行列といい, O と書く. 型をはっきりさせたいときは $O_{m,n}$ と書くこともある.

例題 1

(i, j) 成分が $a_{ij} = i + 2j$ で与えられる 2×3 行列 A を書け.

【解答】 $i = 1, 2, j = 1, 2, 3$ を順に代入する. 第 1 行は $a_{11} = 1 + 2 = 3, a_{12} = 1 + 4 = 5, a_{13} = 1 + 6 = 7$. 第 2 行は $a_{21} = 4, a_{22} = 6, a_{23} = 8$. よって

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 4 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

■ 2. 行列の相等

定義 2 行列の相等

2 つの行列 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ が等しいとは,

- (i) A と B の型が同じであり, かつ
- (ii) すべての (i, j) について $a_{ij} = b_{ij}$

が成り立つことをいう. このとき $A = B$ と書く.

注意

型が違えば, 成分に同じ数が並んでいても等しくない. たとえば $\begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ (1×2) と $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (2×1) は等しくない.

$m \times n$ 行列の等式 $A = B$ は, mn 個の実数の等式 $a_{ij} = b_{ij}$ をまとめて 1 つに書いたものだと思えばよい.

例題 2

次の等式が成り立つように x, y の値を定めよ.

$$\begin{pmatrix} x+y & 2 \\ 3 & x-y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

【解答】 両辺とも 2×2 行列で型は同じ. 成分を比べると $(1, 2)$ 成分と $(2, 1)$ 成分はすでに等しく, 残りは

$$x + y = 5, \quad x - y = 1.$$

これを解いて $x = 3, y = 2$.

■ 3. 和・差・スカラー倍**定義 3 和**

同じ型の行列 $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ に対し, 対応する成分どうしを足した行列を A と B の**和**といい, $A + B$ と書く:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}).$$

型が違う行列どうしの和は**定義しない**.

定義 4 スカラー倍・差

実数 c と行列 $A = (a_{ij})$ に対し, すべての成分を c 倍した行列を A の c 倍 (**スカラー倍**) といい, cA と書く:

$$cA = (c a_{ij}).$$

また $(-1)A$ を $-A$ と書き, 同じ型の A, B に対して $A - B = A + (-B) = (a_{ij} - b_{ij})$ と定める.

「スカラー」とは, 行列やベクトルと区別して, ふつうの数 (ここでは実数) を呼ぶ言葉である.

例 2

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \text{ のとき}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad 3A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 9 & 0 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}.$$

和とスカラー倍については, 次の法則が成り立つ.

定理 1 和とスカラー倍の法則

A, B, C を同じ型の行列, O をそれと同じ型の零行列, c, d を実数とする.

$$(1) A + B = B + A \quad (\text{交換法則})$$

$$(2) (A + B) + C = A + (B + C) \quad (\text{結合法則})$$

$$(3) A + O = A$$

$$(4) A + (-A) = O$$

$$(5) c(A + B) = cA + cB \quad (\text{分配法則})$$

$$(6) (c + d)A = cA + dA \quad (\text{分配法則})$$

$$(7) (cd)A = c(dA)$$

$$(8) 1A = A$$

どれも「当たり前」に見えるが、**行列の等式**なので、定義 2 (相等) に沿って確かめる必要がある。(1) を例に、その手順を見てみよう.

【証明】 (1) $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ を $m \times n$ 行列とする.

型: $A + B$ も $B + A$ も $m \times n$ 行列である.

成分: $A + B$ の (i, j) 成分は $a_{ij} + b_{ij}$, $B + A$ の (i, j) 成分は $b_{ij} + a_{ij}$. 実数の足し算は順序を入れ替えてよいので $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$.

これがすべての (i, j) で成り立つので、定義 2 より $A + B = B + A$. □

ポイント

行列の等式を示すときは、「**型が同じ**」→「 **(i, j) 成分が等しい**」の 2 段階で確かめる. こうすると、行列の等式が**実数の等式**に置き換わり、実数の性質がそのまま使える. これは線形代数全体を通して使う基本の技である.

(2)~(8) も同じ手順で示せる (練習問題 6).

コラム: この 8 つの法則の行き先

定理 1 の 8 つの法則は、第 4 章で学ぶ**ベクトル空間の定義**とほぼそのまま同じ形をしている. 「足し算とスカラー倍ができて、この 8 つの法則を満たすもの」を一般に考えるのがベクトル空間である. いま当たり前に見えるこのリストが、後で主役になる.

例題 3

$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ のとき, $3X - A = X + 2B$ を満たす行列 X を求めよ.

【解答】 定理 1 を使えば、ふつうの 1 次方程式と同じように移項・整理できる. 両辺に $A - X$ を加えて $2X = A + 2B$. 両辺を $\frac{1}{2}$ 倍して

$$X = \frac{1}{2}(A + 2B) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 4 \end{pmatrix}.$$

注意

「移項」や「両辺を $\frac{1}{2}$ 倍」ができるのは、定理1の(1)~(8)が成り立っているからである。ただし、行列どうしの**割り算**はまだ何も定義していない。「 $\frac{X}{A}$ 」のような式は書けないことに注意しよう (No.3の逆行列で改めて考える)。

4. 転置行列**定義 5 転置行列**

$m \times n$ 行列 $A = (a_{ij})$ の行と列を入れ替えた $n \times m$ 行列を、 A の**転置行列**といい、 ${}^tA$ と書く。 ${}^tA$ の (i, j) 成分は a_{ji} である。

本によっては A^T , $A^\top$ と書くこともある。どれも同じ意味。

例 3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \implies {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

A の第1行 $(1, 2, 3)$ が ${}^tA$ の第1列に、第2行が第2列になっている。型は 2×3 から 3×2 に変わる。

定理 2 転置の性質

A, B を同じ型の行列, c を実数とする。

- (1) ${}^t({}^tA) = A$
- (2) ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$
- (3) ${}^t(cA) = c {}^tA$

【証明】(2) $A = (a_{ij}), B = (b_{ij})$ を $m \times n$ 行列とする。

型: $A + B$ は $m \times n$ なので ${}^t(A + B)$ は $n \times m$. ${}^tA, {}^tB$ はともに $n \times m$ なので ${}^tA + {}^tB$ も $n \times m$.

成分: ${}^t(A + B)$ の (i, j) 成分は、 $A + B$ の (j, i) 成分なので $a_{ji} + b_{ji}$. 一方、 ${}^tA + {}^tB$ の (i, j) 成分は $a_{ji} + b_{ji}$. 両者は等しい。

よって ${}^t(A + B) = {}^tA + {}^tB$. □

定義 6 対称行列

正方行列 A が ${}^tA = A$ を満たすとき、 A を**対称行列**という。成分でいえば、すべての i, j について $a_{ij} = a_{ji}$ が成り立つこと、つまり**対角線をはさんで折り返すと重なる行列**である。

例 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 7 & 0 & 5 \\ -2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$
 は対称行列. 対称行列は第 7 章 (内積空間) の「対称行列の対角化」で再び主役になる.

■ 練習問題

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}$ について, 次に答えよ.

(1) A の型を答えよ.

(2) A の $(2, 3)$ 成分を答えよ.

(3) $a_{12} + a_{21}$ を求めよ.

2. (i, j) 成分が $a_{ij} = (-1)^{i+j}$ で与えられる 3 次正方行列 A を書け.

3. 次の等式が成り立つように a, b, c の値を定めよ.

$$\begin{pmatrix} a+b & 2c \\ a-b & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 1 & c+1 \end{pmatrix}$$

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ とする.

(1) $2A - 3B$ を計算せよ.

(2) ${}^t(A - B)$ を計算せよ.

(3) ${}^tA + B$ は計算できるか. 理由とともに答えよ.

5. $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき, $2(X - A) = X + B$ を満たす行列 X を求めよ.

6. 定理 1 の (2), (5), (6) を, 定理 1 (1) の証明にならって成分を使って示せ.

7. 定理 2 の (1), (3) を示せ.

8. (考えてみよう) A を正方行列とする.

(1) $A + {}^tA$ は対称行列であることを示せ.

(2) ${}^t(A - {}^tA) = -(A - {}^tA)$ であることを示せ.

(3) どんな正方行列 A も「対称行列」と「 ${}^tX = -X$ を満たす行列 X 」の和で書けることを示せ.

■ 練習問題の解答

1. (1) 2×3 行列. (2) -2 . (3) $a_{12} = -1$, $a_{21} = 1$ より $a_{12} + a_{21} = 0$.

2. $i + j$ が偶数なら 1, 奇数なら -1 なので

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. 成分を比べて $a + b = 3$, $2c = 6$, $a - b = 1$, $4 = c + 1$. $2c = 6$ より $c = 3$ で, これは $4 = c + 1$ と矛盾しない. $a + b = 3$, $a - b = 1$ より $a = 2$, $b = 1$.

4. (1)

$$2A - 3B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 0 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 6 & 6 \\ 3 & -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ -8 & -6 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}.$$

$$(2) A - B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ より } {}^t(A - B) = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(3) 計算できない. ${}^tA$ は 2×3 , B は 3×2 で型が異なり, 和が定義されないから.

5. $2X - 2A = X + B$ より $X = 2A + B$.

$$X = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. いずれも両辺の型は同じ (A, B, C と同じ型) なので, (i, j) 成分を比べればよい.

(2) 左辺の (i, j) 成分は $(a_{ij} + b_{ij}) + c_{ij}$, 右辺は $a_{ij} + (b_{ij} + c_{ij})$. 実数の足し算の結合法則により等しい.

(5) 左辺の (i, j) 成分は $c(a_{ij} + b_{ij})$, 右辺は $ca_{ij} + cb_{ij}$. 実数の分配法則により等しい.

(6) 左辺の (i, j) 成分は $(c + d)a_{ij}$, 右辺は $ca_{ij} + da_{ij}$. 実数の分配法則により等しい.

7. A を $m \times n$ 行列とする.

(1) ${}^tA$ は $n \times m$ なので ${}^t({}^tA)$ は $m \times n$ で, A と型が同じ. ${}^t({}^tA)$ の (i, j) 成分は ${}^tA$ の (j, i) 成分, それは A の (i, j) 成分 a_{ij} . よって等しい.

(3) 両辺とも $n \times m$. ${}^t(cA)$ の (i, j) 成分は cA の (j, i) 成分 ca_{ji} , $c{}^tA$ の (i, j) 成分も ca_{ji} . よって等しい.

8. (1) 定理 2 より ${}^t(A + {}^tA) = {}^tA + {}^t({}^tA) = {}^tA + A = A + {}^tA$.

(2) 定理 2 より ${}^t(A - {}^tA) = {}^tA - {}^t({}^tA) = {}^tA - A = -(A - {}^tA)$.

(3) $S = \frac{1}{2}(A + {}^tA)$, $X = \frac{1}{2}(A - {}^tA)$ とおくと, (1)(2) と定理 2 (3) より ${}^tS = S$, ${}^tX = -X$ であり, $S + X = A$.

※ ${}^tX = -X$ を満たす正方行列を交代行列 (歪対称行列) という. (2) では定理 2 を「差」にも使っている. $A - B = A + (-1)B$ と見れば (2)(3) から従う.